الشبكة $\wedge$ - متممة :

لتكن E شبكة تملك العنصر الأصغر 0 . إن هذا التعريف ينطبق أيضاً على نصف الشبكة الدنيا .

تعريف :

ليكن x عنصراً ما من الشبكة E . إننا ندعو العنصر الأكبر (إن وجد) للمجموعة $\{y \in E : x \wedge y = 0\}$ بـ $\wedge$ - متمم للعنصر x

ندعو الشبكة $\wedge$ - متممة إذا كانت جميع عناصرها تملك $\wedge$ - متمم

مثال :

لتكن τ شبكة المجموعات المفتوحة (مرتبة بعلاقة الاحتواء) في فضاء طبولوجي هذه الشبكة لا تكون في الحالة العامة متممة ، ولكنها $\wedge$ - متممة وذلك لأنه إذا كانت X مجموعة مفتوحة فإنه توجد أكبر مجموعة مفتوحة غير متقاطعة مع X وهي $E \setminus \bar{X}$ (داخلية) (أو المساوية $C_{\bar{X}}$)

ملاحظات :

- بشكل مشابه يمكن أن نعرف الشبكة $\vee$ - متمم
- الشبكة المتممة ليست بالضرورة $\wedge$ - متممة

مثال :

30, 2, 3, 5, 1

الشبكة $E = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ مع علاقة تقسيم تملك شكل المخطط المجاور

$\{y \in E : y \wedge 2 = 1\} = \{1, 3, 5\}$ لا تملك عنصر أكبر وبالتالي فإن العنصر 2 لا يملك $\wedge$ - متمم أي أن الشبكة ليست $\wedge$ - متممة

مبرهنة :

كل شبكة توزيعية E متممة تكون ~~...~~ $\wedge$ متممة

البرهان :

لتكن E شبكة توزيعية متممة ولتكن $x \in E$ و x' متمم x فيكون $x \wedge x' = 0$ لنفرض أن $y \wedge x = 0$ فيكون

$(y \wedge x') \wedge x = y \wedge (x' \wedge x) = y \wedge 0 = 0 = y \wedge x$

$(y \wedge x') \vee x = (y \vee x) \wedge (x \vee x') = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$ $\Big\} \Rightarrow$

بالاستخدام البرهنة

$$\left.\begin{aligned} x \vee z &= y \vee z \\ x \wedge z &= y \wedge z \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y$$

فإن

$$y \wedge x' = y \Rightarrow y \leq x'$$

أي أن x' هو العنصر الأكبر للمجموعة $\{ y \in E \ ; \ y \wedge x = 0 \}$ وبالتالي عنصر $\wedge$ - متمم للعنصر x أنه اختيارية فإن الشبكة E تكون $\wedge$ - متممة

تمرين :

لتكن $(E_i , \leq_i)$ أسرة من المجموعات حيث مجموعة الأدلة $I = \{1, 2, \ldots, n\}$

المجموعة بالترتيب الطبيعي) ونعرف في المجموعة الجداء $E = \prod_{i \in I} E_i$ العلاقة R بالشكل

$$(x_i) R (y_i) \Leftrightarrow \begin{cases} - \text{ إما } x_i = y_i \text{ من أجل } i \in I \\ - \text{ أو } x_k \leq_k y_k \text{ حيث } k \text{ هو أصغر دليل كبير من أجله } x_k \neq y_k \end{cases}$$

a) برهن أن R هي علاقة ترتيب على E (والتي ندعوه بالترتيب المعجمي lexicographic)

b) برهن أنه إذا كانت E_i سلسلة فإن E تكون أيضاً سلسلة مع الترتيب المعجمي

c) لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية مع الترتيب الطبيعي وضح بالرسم في جملة متعامدة R^2

- مجموعة الحدود العليا للنقطة (x, y) في حالة ترتيب الجداء

- مجموعة الحدود العليا للنقطة (x, y) في حالة الترتيب المعجمي

الحل :

$\forall (x_i) \in E \ ; \ (x_i) = (x_i) \Rightarrow x_i = x_i \quad \forall i \in I \Rightarrow (x_i) R (x_i)$

R انعكاسية

$\forall (x_i), (y_i) \in E \ ; \ (x_i) R (y_i) \ \& \ (y_i) R (x_i) \Rightarrow$

إما $x_i = y_i \quad \forall i \in I \Rightarrow (x_i) = (y_i)$

أو $x_k \leq_k y_k \ \& \ y_j \leq_j x_j \Rightarrow k = j \Rightarrow x_k \leq_k y_k \ \& \ y_k \leq_k x_k$

حيث k هو أصغر دليل كبير من أجله $x_k \neq y_k$ و j هو أصغر دليل كبير من أجله $y_j \neq x_j$

$\Rightarrow x_k = y_k \Rightarrow (x_i) = (y_i) \Rightarrow$ R تناظرية

محاضرات الدفتر

القسم :   السنة :   المادة :   المحاضرة :

$\forall (x_i),(y_i),(z_i) \in E \quad (x_i)R(y_i)$ و $(y_i)R(z_i) \Rightarrow$

- $x_i = y_i$ و $y_i = z_i \ \forall i \in I \Rightarrow x_i = z_i \ \forall i \in I \Rightarrow (x_i)R(z_i)$
- $x_i = y_i \ \forall i \in I$ و $y_k \leq_k z_k$ (أصغر) $\Rightarrow x_k \leq_k z_k$ (أصغر) $\Rightarrow (x_i)R(z_i)$
- $x_k <_k y_k$ و $y_i = z_i \ \forall i \in I \Rightarrow x_k <_k z_k$ (أصغر) $\Rightarrow (x_i)R(z_i)$
- $x_k <_k y_k$ و $y_j <_j z_j$:
  - $k < j \Rightarrow y_i = z_i$ ، $i < j \Rightarrow x_k <_k z_k \Rightarrow (x_i)R(z_i)$
  - $j < k \Rightarrow x_i = y_i$ ، $i < k \Rightarrow x_j <_j z_j \Rightarrow (x_i)R(z_i)$

نجد في جميع الحالات أن $(x_i)R(z_i)$ وبالتالي العلاقة R متعدية ومنه نستنتج أن العلاقة ترتيب على $E = \prod_{i \in I} E_i$

b) إذا كانت E_i سلسلة $\forall i \in I$ فإن أي عنصرين سوف يكونا متقارنين وبالتالي فإنه من أجل أي عنصرين $(x_i),(y_i)$ من E يكون

$x_i = y_i \ \forall i \in I \Rightarrow (x_i)R(y_i)$

$x_k \neq y_k$ حيث k أول عنصر يكون من أجله $x_k \neq y_k$
وبما أن E_k سلسلة حسب الفرض فإن x_k, y_k متقارنين وبالتالي إما

$x_k <_k y_k \Rightarrow (x_i)R(y_i)$ أو $y_k <_k x_k \Rightarrow (y_i)R(x_i)$

إذن x_i, y_i متقارنين في جميع الأحوال وبالتالي فإن $E = \prod_{i \in I} E_i$ سلسلة

مجموعة النقاط التي تقع على يمين المستقيم ... في الربع الرابع [illegible] ... من الربع الأول

أرسم جميع أشكال الشبكات ذوات الخمسة عناصر

الحل

تمرين (3)

برهن أن مجموعة المثاليات في $\mathcal{I}$ حلقة تبديلية تكون شبكة من أجل علاقة الاحتواء

ثم برهن أن $I \wedge J = I \cap J$ ،

$I \vee J = I + J = \{x + y ; x \in I \text{ و } y \in J\}$

ثم برهن أن هذه الشبكة معيارية

الحل :

$\forall I, J \in \mathcal{I} ; \left.\begin{array}{l} I \subseteq I + J \\ J \subseteq I + J \end{array}\right\} \Rightarrow$ $I + J$ هو حد أعلى للمجموعة $\{I, J\}$

ليكن k حد أعلى للمجموعة $\{I, J\}$

$\left.\begin{array}{l} I \subseteq k \\ J \subseteq k \end{array}\right\} \Rightarrow I + J \subseteq k$

ومنه نستنتج أن $I + J$ هو حد أعلى أصغري للمجموعة $\{I, J\}$ وبالتالي

$I \vee J = I + J$

$\left.\begin{array}{l} I \cap J \subseteq I \\ I \cap J \subseteq J \end{array}\right\} \Rightarrow$ $I \cap J$ هو حد أدنى للمجموعة $\{I, J\}$

ليكن k' حد أدنى آخر للمجموعة $\{J, I\}$

$\left.\begin{array}{l} k' \subseteq I \\ k' \subseteq J \end{array}\right\} \Rightarrow k' \subseteq I \cap J$

نبين أن $I \cap J$ هو حد أدنى أعظمي للمجموعة $\{J, I\}$ وبالتالي $I \wedge J = I \cap J$ ومنه

فإن $\mathcal{I}$ شبكة

نبرهن أن ٢ صحيحة: أي لنبرهن أن $I \vee (J \cap k) = (I \vee J) \wedge k$ حيث $I \subseteq k$

أي نبرهن أن $I + (J \cap k) = (I + J) \cap k$

الحل:

$$\left.\begin{array}{l} I + (J \cap k) \subseteq I + J \\ I + (J \cap k) \subseteq I + k \end{array}\right\} \Rightarrow I + (J \cap k) \subseteq (I + J) \cap (I + k)$$

$$= (I + J) \cap k$$

$$\Rightarrow \boxed{I + (J \cap k) \subseteq (I + J) \cap k}$$

$\forall x \in (I + J) \cap k \Rightarrow x \in I + J \;\&\; x \in k \Rightarrow \exists i \in I \;\&\; j \in J$ و

$x = i + j \;\&\; x \in k$

$\Rightarrow j = x - i \;\&\; x \in k \Rightarrow j \in k + I$

$(I \subseteq k$ لأن$) \Rightarrow j \in k$

$i \in I \;\&\; j \in J \;\&\; j \subseteq k \Rightarrow i \in I \;\&\; j \in J \cap k$

$\Rightarrow x \in I + (J \cap k)$

ومنه نجد $\boxed{(I + J) \cap k \subseteq I + (J \cap k)}$

ومن الاحتوائين ينتج المساواة وبالتالي الشبكة حلقة

تعريف الشبكة الأولية

تمرين ٤:

في الشبكة L نقول عن المرشحة F أنها أولية إذا كان $x \vee y \in F \Rightarrow x \in F$ أو $y \in F$

a) أعط مثالاً عن مرشحة أولية فعلية بحيث لا تكون مولد مرشحة

b) أعط مثالاً عن مولد مرشحة بحيث لا تكون مرشحة أولية

c) أثبت أنه في الشبكة التوزيعية كل مولد مرشحة تكون مرشحة أولية

الحل:

a) في السلسلة

d
c
b
a

$c \vee d = d$ إن المرشحة $\{c, d\}$ حيث أولية ولكنها ليست مولد مرشحة لأنه

المرشحة $[a, b)$ ذكر تلك المرشحة

b) في الشبكة مع ملاحظة بأن $\{3,30\}$ هي نفسها مرشحة في تلك الشبكة ولكنها ليست أولية لأن $2\vee 5=30\in\{3,30\}$ مع أن $2\notin\{3,30\}$ ، $5\notin\{3,30\}$

c) بفرض أن L تبولية و f نفسه مرشحة فيها ولتكن $x\vee y\in f$ ولنفرض جدلاً أن $x\notin f$ و $y\notin f$ حسب مبرهنة سابقة إذا كانت $x\notin f$ و f مرشحة فإنه يوجد عنصر مثل $x_1\in f$ بحيث يكون $x\wedge x_1=0$

$$x_1\wedge(x\vee y)=(x_1\wedge x)\vee(x_1\wedge y)=0\vee(x_1\wedge y)=x_1\wedge y$$

$$\Rightarrow x_1\wedge y\in f \ \& \ x_1\wedge y\leq y \ \& \ f \text{ مرشحة } \Rightarrow y\in f$$

وهذا تناقض مع الفرض الجدلي ومنه لابد أن يكون إما $x\in f$ أو $y\in f$

وبالتالي f تكون مرشحة أولية

تمرين 2:

لتكن L شبكة ولنعرف في L من التطبيقين

$$f(x,y,z)=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)$$

$$g(x,y,z)=(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$$

a) برهن أنه إذا كانت L توزيعية فإن $f=g$

b) العكس: إذا كان $f=g$ برهن أن L توزيعية

الحل:

a) بفرض أن L توزيعية

$$f(x,y,z)=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)$$

$$\overset{\text{توزيعية}}{=}[x\vee((y\wedge z)\vee(z\wedge x))]\wedge[y\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)]$$

$$\overset{\text{ماصية}}{=}[x\vee(y\wedge z)]\wedge[y\vee(z\wedge x)]$$

$$=[(x\vee y)\wedge(x\vee z)]\wedge[(y\vee z)\wedge(y\vee x)]$$

$$=(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(x\vee z)=g(x,y,z)$$

$$\Rightarrow f=g$$

b) نبرهن أن $f=g$ لنبرهن أن أولاً E عيارية مفترضين أن $x \leq z$ نثبت أن

$f(x,y,z) = (x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)$

$= (x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee x$ حسب الخاصية

$= x\vee(y\wedge z)$

$g(x,y,z) = (x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$ $\quad x\leq z$

$= (x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge z$

$= (x\vee z)\wedge z$

ولدينا فرضاً $f=g \Leftarrow x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge z \Leftarrow$ E شبكة عيارية

لنبرهن أن E توزيعية:

$x\wedge f = x\wedge[(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)] = [(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)]\wedge x$

عيارية $x\wedge y\leq x$: $= (x\wedge y)\vee[((y\wedge z)\vee(z\wedge x))\wedge x] =$

$= (x\wedge y)\vee[((z\wedge x)\vee(y\wedge z))\wedge x]$

$= (x\wedge y)\vee(z\wedge x)\vee[(y\wedge z)\wedge x]$

$= \boxed{(x\wedge y)\vee(z\wedge x)}$ ① $\quad$ لأن $z\geq y\wedge z$

الأمثالية / الامتصاص

$x\wedge g = x\wedge(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x) = x\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$

$= x\wedge(y\vee z) \Rightarrow \boxed{x\wedge g = x\wedge(y\vee z)}$ ②

ولكن $f=g \Rightarrow x\wedge f = x\wedge g$ ③

من ① و ② و ③ نستنتج أن $x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(z\wedge x)$ وهذا يثبت أن E شبكة توزيعية